Deux vecteurs sont *parallèles* s'ils sont multiples l'un de l'autre.

2.5.2 Norme euclidienne.

En accord encore avec la définition classique de la norme utilisée en géométrie, on introduit la définition suivante.

La *norme euclidienne* d'un vecteur $\mathbf{a}$ est le nombre positif donné par

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}|\mathbf{a})} \geq 0 \tag{2.23}$$

La norme ainsi définie est dite *induite* par le produit scalaire.

On dit qu'un vecteur est *normé* ou *unitaire* lorsque sa norme est égale à un. Des vecteurs normés mutuellement orthogonaux sont dits *orthonormés*.

2.5.3 Évaluation du produit scalaire et de la norme euclidienne.

Le produit scalaire et la norme peuvent être évalués en fonction des composantes des vecteurs dans une base donnée.

La situation la plus simple est rencontrée quand les vecteurs sont exprimés dans une *base orthonormée*, *i.e.* une base constituée d'un ensemble de n vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ qui sont à la fois normés et mutuellement orthogonaux deux à deux. Dans ce cas, on a

$$(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \tag{2.24}$$

où δ_{ij} est le symbole *delta de Kronecker* tel que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \tag{2.25}$$

Considérons dès lors deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ et leur expression dans la base orthonormée considérée

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{e}_i \tag{2.26}$$

Dans une telle base, les composantes de ces vecteurs peuvent être obtenues simplement en formant les produits scalaires du vecteur considéré avec les vecteurs de base, *i.e.*

$$(\mathbf{a}|\mathbf{e}_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i (\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j \tag{2.27}$$

Par application de (2.21), on peut calculer le produit scalaire de deux vecteurs en formant

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}|\mathbf{b}) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i | \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i\, \overline{b}_j (\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i\, \overline{b}_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b}_i \end{aligned} \tag{2.28}$$

Le produit scalaire s'exprime donc simplement en fonction des composantes des vecteurs dans la base orthonormée considérée : le produit scalaire est égal à la somme des produits des composantes du premier vecteur et du complexe conjugué des composantes correspondantes du second vecteur.

Conformément à (2.20), l'expression (2.28) montre que le produit scalaire n'est pas commutatif dans un espace vectoriel complexe mais est bien commutatif dans un espace vectoriel réel.

L'expression de la norme euclidienne dans une base orthonormée se déduit aisément de (2.28). On a

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}|\mathbf{a})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} \tag{2.29}$$

Le carré de la norme euclidienne d'un vecteur est égal à la somme des carrés des modules des composantes (complexes ou réelles) du vecteur dans une base orthonormée.

En adoptant une écriture matricielle, les relations (2.28) et (2.29) peuvent s'écrire respectivement

$$(\mathbf{a}|\mathbf{b}) = \mathsf{b}^*\mathsf{a} \tag{2.30}$$

et

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathsf{a}^*\mathsf{a}} \tag{2.31}$$

où les matrices-colonnes a et b désignent les composantes des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans la base orthonormée considérée.

Afin d'exprimer le produit scalaire et la norme en fonction des composantes des vecteurs dans une base $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ qui n'est pas orthonormée, introduisons les n^2 produits scalaires

$$g_{ij} = \left(\mathbf{e}'_j|\mathbf{e}'_i\right), \qquad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{2.32}$$

de ces vecteurs . Le produit scalaire étant une forme hermitienne, ces nombres sont tels que

$$g_{ji} = \left(\mathbf{e}'_i|\mathbf{e}'_j\right) = \overline{\left(\mathbf{e}'_j|\mathbf{e}'_i\right)} = \overline{g_{ij}} \tag{2.33}$$

de sorte qu'ils définissent une matrice G hermitienne.

Dans la base quelconque $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$, deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ s'écrivent (de façon unique)

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a'_i \mathbf{e}'_i \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n} b'_j \mathbf{e}'_j \tag{2.34}$$

Contrairement à (2.27), les composantes d'un vecteur dans une base quelconque ne s'identifient plus au produit scalaire de ce vecteur avec les vecteurs de base. En effet, on a

$$\left(\mathbf{a}|\mathbf{e}'_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a'_i \mathbf{e}'_i |\mathbf{e}'_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a'_i \left(\mathbf{e}'_i|\mathbf{e}'_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a'_i g_{ji} = \left[\mathsf{G}\mathsf{a}'\right]_j \tag{2.35}$$

où a' désigne la matrice colonne des composantes de $\mathbf{a}$ dans la base $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$.

Les expressions du produit scalaire et de la norme euclidienne ne profitent pas non plus de la simplification associée à l'orthogonalité des vecteurs de base. Dans une base quelconque, on a

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a}|\mathbf{b}) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a'_i \mathbf{e}'_i | \sum_{j=1}^{n} b'_j \mathbf{e}'_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a'_i \overline{b}'_j (\mathbf{e}'_i|\mathbf{e}'_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a'_i g_{ji} \overline{b}'_j = \mathsf{b}'\mathsf{G}\mathsf{a}'
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

et [1]

$$
\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}|\mathbf{a})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a'_i g_{ji} \overline{a}'_j} = \sqrt{\mathsf{a}'^{*}\mathsf{G}\mathsf{a}'} \tag{2.37}
$$

Les différents résultats obtenus ci-dessus peuvent être résumés de la façon suivante :

Base	orthonormée	quelconque
$(\mathbf{e}_j\|\mathbf{e}_i)$	δ_{ij}	g_{ij}
$(\mathbf{a}\|\mathbf{b})$	$\sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b}_i$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i g_{ji}\overline{b}_j$
$\|\mathbf{a}\|$	$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|^2}$	$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i g_{ji}\overline{a}_j}$

Ils montrent tout l'intérêt de travailler dans une base orthonormée puisque les expressions du produit scalaire et de la norme y sont bien plus simples. Remarquons d'ailleurs que, dans une telle base,

$$
g_{ij} = (\mathbf{e}_j|\mathbf{e}_i) = \delta_{ij} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{G} = \mathbb{I} \tag{2.38}
$$

de sorte que les résultats généraux (2.36) et (2.37) se réduisent à, respectivement, (2.28) et (2.29).

Les définitions des quelques paragraphes précédents et les résultats de cette section permettent de jeter un éclairage nouveau sur les matrices unitaires (et orthogonales dans le cas réel). Pour rappel, ces matrices sont telles que

$$
\mathsf{A}^{*} = \mathsf{A}^{-1} \tag{2.39}
$$

et donc

$$
\mathsf{A}^{*}\mathsf{A} = \mathbb{I} \tag{2.40}
$$

Si on identifie les colonnes d'une telle matrice par $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2, \ldots, \mathsf{c}_n$, (2.40) peut s'écrire

$$
\mathsf{A}^{*}\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mathsf{c}_1{}^{*} \\ \mathsf{c}_2{}^{*} \\ \vdots \\ \mathsf{c}_n{}^{*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{c}_1 & \mathsf{c}_2 & \cdots & \mathsf{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathsf{c}_1{}^{*}\mathsf{c}_1) & (\mathsf{c}_1{}^{*}\mathsf{c}_2) & \cdots & (\mathsf{c}_1{}^{*}\mathsf{c}_n) \\ (\mathsf{c}_2{}^{*}\mathsf{c}_1) & (\mathsf{c}_2{}^{*}\mathsf{c}_2) & \cdots & (\mathsf{c}_2{}^{*}\mathsf{c}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathsf{c}_n{}^{*}\mathsf{c}_1) & (\mathsf{c}_n{}^{*}\mathsf{c}_2) & \cdots & (\mathsf{c}_n{}^{*}\mathsf{c}_n) \end{pmatrix} = \mathbb{I} \tag{2.41}
$$

Il vient donc

$$
\mathsf{c}_i{}^{*}\mathsf{c}_j = \delta_{ij} \tag{2.42}
$$

1. En anticipant sur les concepts introduits à la section 4.9, remarquons que G doit être définie positive pour satisfaire à la condition (2.22).

i.e. les colonnes d'une matrice unitaire (ou orthogonale) sont formées des composantes (dans une base orthonormée) de vecteurs normés mutuellement orthogonaux. Il en est de même des lignes d'une matrice unitaire ou orthogonale puisque, notant $\mathsf{l}_1, \mathsf{l}_2, \ldots, \mathsf{l}_n$ les lignes de A et utilisant la relation

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^* = \mathbb{I} \tag{2.43}$$

on obtient

$$\mathsf{l}_i \mathsf{l}_j^{\,*} = \delta_{ij} \tag{2.44}$$

2.5.4 Inégalités classiques des normes.

Quels que soient les vecteurs d'un espace vectoriel normé au sens de (2.23), les inégalités suivantes sont vérifiées.

Inégalité de Schwarz

$$|(\mathbf{a}|\mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \tag{2.45}$$

où le signe d'égalité a lieu si et seulement si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont linéairement dépendants.

En géométrie, on sait que $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| |\cos\theta| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$ où θ est l'angle entre les deux vecteurs et l'inégalité de Schwarz est bien vérifiée. Dans le cas d'un espace vectoriel quelconque, l'inégalité peut être prouvée en considérant

$$\|\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}|\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) = (\mathbf{a}|\mathbf{a}) + \overline{\lambda}(\mathbf{a}|\mathbf{b}) + \lambda(\mathbf{b}|\mathbf{a}) + \lambda\overline{\lambda}(\mathbf{b}|\mathbf{b}) \geq 0$$

Si on écrit le nombre complexe $(\mathbf{a}|\mathbf{b})$ sous la forme [2] $|(\mathbf{a}|\mathbf{b})|\,\mathrm{e}^{i\alpha}$, alors

$$\|\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + |\lambda|^2 \|\mathbf{b}\|^2 + \overline{\lambda}|(\mathbf{a}|\mathbf{b})|\,\mathrm{e}^{i\alpha} + \lambda|(\mathbf{a}|\mathbf{b})|\,\mathrm{e}^{-i\alpha} \geq 0$$

Choisissant en particulier $\lambda = r\mathrm{e}^{i\alpha}$, il vient

$$\|\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + r^2 \|\mathbf{b}\|^2 + 2r|(\mathbf{a}|\mathbf{b})| \geq 0$$

Évaluant le discriminant de cette expression quadratique de r, il vient

$$4|(\mathbf{a}|\mathbf{b})|^2 \leq 4\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2$$

d'où le résultat (tous les facteurs étant positifs).

La relation (2.45) est vérifiée avec le signe d'égalité si et seulement si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont linéairement dépendants. En effet, d'une part, si $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$ (ou $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$) avec $\alpha \in \mathbb{C}$, on vérifie aisément que

$$|(\mathbf{a}|\mathbf{b})| = |(\mathbf{a}|\alpha\mathbf{a})| = |\overline{\alpha}(\mathbf{a}|\mathbf{a})| = |\alpha| \|\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|$$

D'autre part, si (2.45) est vérifié avec le signe d'égalité, alors le discriminant de l'expression quadratique précédente est nul. Dans ce cas, il existe un r et donc un λ tel que

$$\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = 0$$

i.e. les deux vecteurs sont linéairement dépendants. □

2. On note $\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha = \mathrm{cis}\alpha$.